

高三数学参考答案及评分标准

2021. 5

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1-4 ABCD 5-8 ABDB

二、多项选择题(每小题 5 分,选对但不全的得 2 分,共 20 分)

9. ABD 10. AC 11. ACD 12. ABD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 0.2 14. (-3,3) 15. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 16. $\frac{1}{2}$

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 解:(1)由题意得 $a_1=2, a_2=4, a_3=8, \dots$ 2 分

所以 $q = \frac{4}{2} = 2$, 即 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

又因为 $b_n = 2\log_2 a_n = 2\log_2 2^n$,

所以 $b_n = 2n$. 5 分

(2)解:因为 $\frac{1}{b_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ 7 分

所以 $T_n = \frac{1}{b_1^2 - 1} + \frac{1}{b_2^2 - 1} + \dots + \frac{1}{b_n^2 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$

$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{n}{2n+1}$. 9 分

所以 $T_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) < \frac{1}{2}$ 得证. 10 分

18. 解:(1) $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin \angle ABM$,

$S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}BC \cdot BM \sin \angle MBC$. 2 分

因为 $S_{\triangle ABM} = 2S_{\triangle BCM}$, $\angle ABM = \angle MBC$,

所以 $AB = 2BC$.

由正弦定理得 $\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{AB}{BC} = 2$ 6 分

(2)由 $\frac{\sin C}{\sin A} = 2$ 得 $c = 2a$, 7 分

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

又因为 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$,

所以 $4 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \times \frac{1}{4}$,

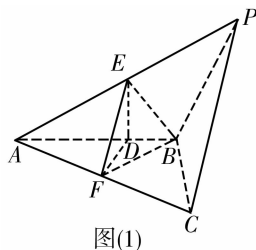
所以 $a = 1$, 从而 $c = 2$. 9 分

又因为 $\cos B = \frac{1}{4}$ 且 $0 < B < \pi$,

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 10 分

因此 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 12 分

19. (1) 证明: 如图(1), 过点 E 作 $ED \perp AB$, 垂足为 D , 连接 DF , 由题意知, $\triangle PAB \cong \triangle CAB$, 易证 $\triangle EDA \cong \triangle FDA$,



所以 $\angle EDA = \angle FDA = \frac{\pi}{2}$, 即 $FD \perp AB$, 3 分

因为 $ED \perp AB$, $ED \cap FD = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 EFD ,
又因为 $EF \subset$ 平面 EFD , 所以 $EF \perp AB$ 5 分

(2) 过 P 作 $PO \perp AB$, 垂足为 O , 连接 CO , 则 $CO \perp AB$,
由平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 交线为 AB , 所以 $PO \perp$ 平面 ABC .

以 O 为坐标原点, 以 OA, OC, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB = a$, $\angle ABC = \theta$,

由条件①得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin \theta = 3\sqrt{3}$,

由条件②得 $PO = a \sin \theta = 3$,

由条件③得 $\angle PBO = 60^\circ$, 即 $\theta = 120^\circ$.

若选条件①②, 可求得 $a = 2\sqrt{3}$ 7 分

$B(\sqrt{3}, 0, 0), A(3\sqrt{3}, 0, 0), P(0, 0, 3), C(0, 3, 0)$,

因而 $E(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2}), F(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0), \overrightarrow{BE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2})$.

设平面 BEF 的一个法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases}$ 得 $\mathbf{m} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$, 10 分

又易知平面 BFA 的一个法向量 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$,

故 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以二面角 $E-BF-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

若选①③或②③均可求得 $a = 2\sqrt{3}$, 下同.

20. 解: (1) 若甲通过测试, 则甲的得分 $X = 4$ 或 5 ,

$P(X = 4) = 0.9 \times 0.5 \times 0.5 = 0.225$, 2 分

$P(X = 5) = 0.1 \times 0.5 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 = 0.025 + 0.05 = 0.075$, 4 分

所以 $P = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.225 + 0.075 = 0.3$ 5 分

(2) Y 的可能取值为 $0, 2, 3, 4, 5$.

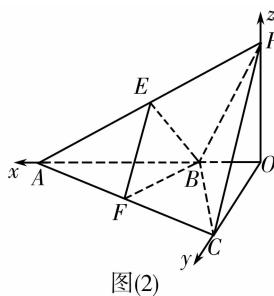
$P(Y = 0) = 0.8 \times 0.6 \times 0.6 = 0.288$,

$P(Y = 2) = 0.8 \times 0.4 \times 0.6 + 0.8 \times 0.6 \times 0.4 = 0.384$,

$P(Y = 3) = 0.2 \times 0.6 \times 0.6 = 0.072$,

$P(Y = 4) = 0.8 \times 0.4 \times 0.4 = 0.128$,

$P(Y = 5) = 0.2 \times 0.6 \times 0.4 + 0.2 \times 0.4 = 0.128$ 8 分



Y	0	2	3	4	5
P	0.288	0.384	0.072	0.128	0.128

..... 10 分

(3) 甲水平高 11 分

理由如下: 甲通过测试的概率 0.3 大于乙通过测试的概率 0.256. 12 分

21. 解: (1) 由抛物线定义, 得 $|PF| = 2 + \frac{p}{2} = 3$,

得 $p = 2$,

所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2 = 4y$; 4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

设直线 l 的方程为 $y = kx + 4$,

联立 $\begin{cases} y = kx + 4, \\ x^2 = 4y, \end{cases}$ 消掉 x 得 $x^2 - 4kx - 16 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -16$, 6 分

设在点 A, B 的切线斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 = \frac{x_1}{2}, k_2 = \frac{x_2}{2}$,

所以在点 A 的切线方程为 $y - y_1 = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{2}x - \frac{x_1^2}{4}$ ①

同理可得在点 B 的切线方程为 $y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_2^2}{4}$ ② 7 分

由①②得 $x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

将 x_Q 代入①得 $y_Q = -\frac{x_1 x_2}{4}$, 8 分

所以 $Q(2k, -4)$, 10 分

即点 Q 在定直线 $y = -4$ 上;

设点 G 关于直线 $y = -4$ 的对称点为 G' , 则 $G'(0, -12)$,

因为 $|PQ| + |GQ| = |PQ| + |G'Q| \geq |G'P| = 2\sqrt{51}$,

所以三角形 PQG 周长取得最小值为 $|GP| + |G'P| = 2\sqrt{51} + 2\sqrt{3}$ 12 分

22. 解: (1) 由于 $f(e^{-2}) = -2e^{-2}$, 又 $f'(x) = 1 + \ln x$,

故切线斜率 $k = f'(e^{-2}) = -1$,

因此所求切线方程 $y + 2e^{-2} = -(x - e^{-2})$,

即 $y = -x - e^{-2}$ 3 分

(2) 由于 $f'(x) = 1 + \ln x$,

故 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x_1 \in (0, \frac{1}{e}), x_2 \in (\frac{1}{e}, 1)$,

由(1)可知, 在 $(e^{-2}, -2e^{-2})$ 点的切线方程为 $y = -x - e^{-2}$,

设 $y = -x - e^{-2}$ 与 $y = a$ 的交点横坐标为 x_3 ,

即 $x_3 = -e^{-2} - a$, 下证 $x_3 < x_1$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减, 故只需证明 $f(x_3) - f(x_1) > 0$ 即可.

事实上设 $y = f(x_3) - f(x_1) = x_3 \ln x_3 - a = x_3 \ln x_3 + e^{-2} + x_3 (x_3 \in (0, \frac{1}{e}))$,

$$y' = 1 + \ln x_3 + 1 = 2 + \ln x_3,$$

故 $x_3 \in (0, e^{-2})$, $y' < 0$, 函数单调递减,

$x_3 \in (e^{-2}, e^{-1})$, $y' > 0$, 函数单调递增,

因此 $y > y|_{x_3=e^{-2}} = 0$,

即 $x_3 < x_1$ 9 分

又 $f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y = x - 1$,

设 $y = x - 1$ 与 $y = a$ 的交点横坐标为 x_4 , 即 $x_4 = a + 1$, 下证 $x_4 > x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 单调递增, 故只需证明 $f(x_4) - f(x_2) > 0$ 即可,

事实上设 $y = f(x_4) - f(x_2) = x_4 \ln x_4 - a = x_4 \ln x_4 - x_4 + 1$,

$y' = 1 + \ln x_4 - 1 = \ln x_4 < 0$, 函数在 $x_4 \in (\frac{1}{e}, 1)$ 单调递减, $y > y|_{x_4=1} = 0$,

即 $x_4 > x_2$.

综上所述, $x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = a + 1 + e^{-2} + a$,

即 $x_2 - x_1 < 1 + 2a + e^{-2}$ 12 分